

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЗИЦИОННО-ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ДЕТЕКТОРОВ

И. Б. Смирнов^{1,*}

¹ Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»,
Гатчина, 188300, Россия

Рассматриваются методы восстановления пространственного разрешения детекторов, состоящих из нескольких детектирующих слоев, каждый из которых независимо от других измеряет координату пересечения трека частицы с данным слоем. Рассматриваемые методы основаны на сравнении измерений координат в разных детектирующих слоях. Разрешение каждого слоя считается неизвестным и не равным, в общем случае, разрешениям других слоев. Рассмотрен вопрос о минимальном количестве слоев, позволяющем восстановить индивидуальное разрешение каждого слоя, и методы получения усредненных разрешений при меньшем количестве слоев.

Methods for reconstructing the spatial resolution of detectors consisting of several detecting layers are considered. It is assumed that each of the detecting layers independently measures the coordinate of the intersection of a particle track with a given layer. The methods under consideration are based on a comparison of coordinate measurements in different detecting layers. The resolution of each layer is considered unknown and, in general, unequal to the resolutions of other layers. The problem of the minimum number of layers, allowing one to reconstruct the individual resolution of each layer, and methods for obtaining average resolutions with a smaller number of layers are discussed.

PACS: 29.40.Gx

ВВЕДЕНИЕ

Знание индивидуального пространственного разрешения детектирующих слоев многослойных детекторов необходимо для оптимизации обработки экспериментальных данных, полученных с их помощью, а также для изучения и оптимизации самих детекторов. «Референсные» детекторы с предварительно измеренным разрешением на практике чаще всего недоступны. Поэтому исследователи могут реконструировать погрешности измерений, используя только сами эти измерения. Разброс измерений каждого трека в соседних слоях детектора зависит от разрешения этих слоев, а также от разброса неизвестных углов наклона треков, что

* E-mail: ig.b.smirnov@gmail.com

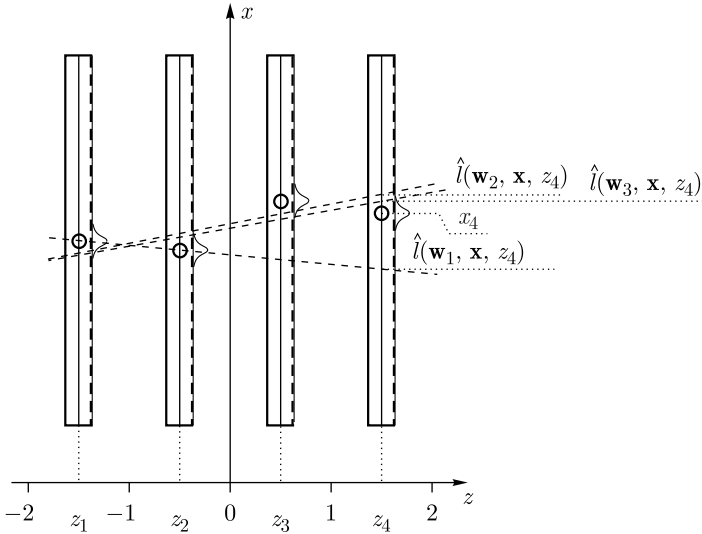
делает индивидуальную реконструкцию разрешения каждого слоя нетривиальной математической задачей. Обычно приходится довольствоваться предположением о равном разрешении слоев детектора и оценками разрешения, справедливыми только при этом условии (см. работы [1–6] и многие другие). Это препятствует более детальному изучению детекторов и более точному анализу их данных. Детекторы или детектирующие слои могут иметь разную конструкцию, или могут иметь место непреднамеренные микроскопические различия или различные электронные помехи, которые существенно изменяют характеристики детекторов. Разрешение слоев, рассчитанное с использованием предположения о равенстве, может представлять собой смесь разрешений разных слоев, но в любом случае это не разрешение какого-либо конкретного слоя и не точное среднее значение, а значение, не имеющее четко определенного смысла.

Эта неопределенность наиболее существенна для детекторов с небольшим количеством слоев, поскольку иначе ошибка экстраполяции трека, подогнанного по измерениям всех слоев, или всех слоев кроме изучаемого, может быть гораздо меньше, чем разрешение изучаемого слоя, особенно если он внутренний, как в работе [7]. Детекторы с небольшим количеством слоев весьма часто используются на практике из-за соображений экономии и минимизации вещества в детекторе. Например, проект эксперимента «Протон» для измерения зарядового радиуса протона, который готовится в ПИЯФ [8], включает так называемые «катодные стриповые камеры», которые измеряют каждую координату только четырьмя камерами, причем измерения должны быть произведены с очень небольшой и измеренной погрешностью. Однако литература не предлагает всесторонне обоснованных методов для таких детекторов, а имеющиеся сообщения [9–14] содержат противоречивые утверждения, в частности относительно минимального количества слоев, для которого возможно определение индивидуальных разрешений, а также относительно точности и применимости различных методов. Вычисление точного среднего разрешения в случаях, когда индивидуальные разрешения восстановить невозможно, вообще не рассматривается.

В данной работе будет предложен и обоснован общий метод для определения индивидуальных разрешений, а также рассмотрены возможности для определения средних разрешений в случаях, когда индивидуальные разрешения не восстанавливаются. Основное внимание будет уделено случаю четырехслойных детекторов.

1. НАБЛЮДАЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1. Фитирование треков и «остатки». Рассмотрим детектор с N параллельными детектирующими слоями, каждый из которых измерит одну координату (см. рисунок). Слой с номером i измеряет координату x_i , которая равна сумме истинной (неизвестной) координаты $x_{t,i}$ трека



Пример установки, состоящей из четырех одинаковых катодных стриповых камер, размещенных на равных расстояниях друг от друга. Центры зарядов, наведенных на катодных стрипах (показаны символически), указывают на x -координаты предполагаемых пересечений трека с плоскостями анодных проволок. Эти предполагаемые пересечения обозначены кружками. Примеры треков, отфитированных по измерениям в двух, трех и четырех слоях, показаны штриховыми линиями. Если в процедуре фитирования использовать все слои, те же треки можно получить с весами $\mathbf{w}_1^T = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{w}_2^T = (1, 1, 1, 0)$ и $\mathbf{w}_3^T = (1, 1, 1, 1)$. Они пересекают четвертый слой в точках $\hat{l}(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}, z_4)$ и оставляют остатки $x_4 - \hat{l}(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}, z_4)$

в момент пересечения этого слоя и случайной погрешности измерения ϵ_i : $x_i = x_{t,i} + \epsilon_i$. Предполагаем, что математическое ожидание случайной величины ϵ_i , обозначаемое $E(\epsilon_i)$, равно нулю. Необходимо реконструировать дисперсии $V(\epsilon_i)$ ошибок и соответствующие им стандартные отклонения или разрешения $\sigma(\epsilon_i) = \sqrt{V(\epsilon_i)}$. Предполагаем, что ϵ_i для разных слоев не коррелируют. Подавление систематических смещений, которые типичны для стриповых детекторов и могут привести к корреляциям, рассмотрено в другой работе автора [15].

Предполагается, что траектория (трек) частицы представляет собой прямую линию $l(z) = a_1 + a_2 z$, где a_1 и a_2 — неизвестные параметры, оценки которых можно получить путем подгонки («фитирования») по измеренным координатам x_i с использованием произвольно выбранных неотрицательных весов $w_{\nu,i}$, где ν обозначает один из N_w наборов весов. Наборов может быть один или несколько. Фитирование выполняется путем минимизации суммы взвешенных квадратов расхождений между

измерениями и предсказаниями:

$$S = \sum_{i=1}^N w_{\nu,i} (x_i - l(z_i))^2. \quad (1)$$

В любом наборе весов как минимум два веса должны быть ненулевыми. В стандартном методе наименьших квадратов веса являются обратными дисперсиями ошибок, но эти дисперсии пока неизвестны. Поэтому при обработке экспериментальных данных необходимо выбрать любые подходящие значения весов. Простейший выбор — это единицы для слоев, включенных в подгонку (в «фит»), и нули для остальных. Чтобы доказать, что какую-то характеристику получить невозможно при любых весах, необходимо проводить вычисления с весами как с переменными, которые могут принимать любые значения. Значения a_1 и a_2 , минимизирующие S для данных весов и измерений, будем маркировать шляпками: $\hat{a}_1(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x})$ и $\hat{a}_2(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x})$ соответственно. Здесь \mathbf{w}_ν обозначает вектор всех $w_{\nu,i}$ для $i \in [1, N]$, а \mathbf{x} обозначает вектор всех x_i . Соответствующая прямая обозначается как

$$\hat{l}(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}, z) = \hat{a}_1(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}) + \hat{a}_2(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x})z. \quad (2)$$

Значения $\hat{a}_1(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x})$ и $\hat{a}_2(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x})$ находятся алгебраически путем приравнивания к нулям частных производных S по a_1 и a_2 и решения соответствующей системы двух уравнений. Обозначим через s_ν общий вес: $s_\nu = \sum_{i=1}^N w_{\nu,i}$, и будем обозначать взвешенное среднее значение любой переменной или выражения v_i , связанного со слоями, черточкой над символом: $\bar{v}_\nu = \sum_{i=1}^N w_{\nu,i} v_i / s_\nu$. Обозначим через $D_\nu(z)$ величину, похожую на дисперсию z (она была бы дисперсией z , если бы z была случайной величиной, а все веса были бы единичными): $D_\nu(z) = \overline{z^2}_\nu - (\bar{z}_\nu)^2$. Минимизация уравнения (1) приводит к

$$\hat{a}_2(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}) = \frac{\overline{xz}_\nu - \bar{x}_\nu \bar{z}_\nu}{D_\nu(z)}, \quad \hat{a}_1(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}) = \bar{x}_\nu - a_2 \bar{z}_\nu = \frac{\overline{x}_\nu z^2_\nu - \bar{x}_\nu \bar{z}_\nu}{D_\nu(z)}. \quad (3)$$

Расхождения, обозначаемые как r , между измерениями и предсказаниями, т. е. «остатки»*, для каждого слоя i записываются так:

$$r_{\nu,i} = x_i - \hat{l}(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}, z_i). \quad (4)$$

Дисперсия остатка равна

$$V(r_{\nu,i}) = V(x_i - \hat{l}(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}, z_i)) = V(x_{t,i} + \epsilon_i - \hat{l}(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}_t + \epsilon, z_i)). \quad (5)$$

* Термин «остаток» используется здесь в обобщенном смысле, т. е. независимо от того, используется измерение, относительно которого рассчитывается остаток, для фитирования трека или нет.

Неизвестными случайными величинами в уравнении (5) являются не только ϵ , но и \mathbf{x}_t , если только налетающие частицы не движутся по одной фиксированной траектории. Значения $x_{t,i}$ коррелируют друг с другом. Поэтому применение правил распространения ошибок непосредственно к $V(r_{\nu,i})$ непродуктивно. Интуитивно кажется, что общее положение и наклоны прямых траекторий не должны влиять на результаты. Однако неочевидно, как исключить дисперсии и корреляции \mathbf{x}_t из результирующих дисперсий остатков. Это будет рассмотрено в следующем п. 1.2.

Для полноты рассмотрения следует отметить, что представленные выше уравнения можно переписать в более общей полностью матричной форме. Рассмотрим набор функций $f_j(z)$, $j = 1, \dots, k$ и набор параметров a_j , образующих вектор \mathbf{a} . В нашем случае $k = 2$, $f_1(z) = 1$, $f_2(z) = z$. Уравнение трека имеет вид $l(z) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(z)$. Вектор x -координат трека в местах пересечения им слоев обозначим вектором \mathbf{l} , состоящим из элементов $l(z_1), l(z_2), \dots, l(z_N)$. Пусть матрица \mathbf{F} записывается следующим образом:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(z_1) & f_2(z_1) & \dots & f_k(z_1) \\ f_1(z_2) & f_2(z_2) & \dots & f_k(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(z_N) & f_2(z_N) & \dots & f_k(z_N) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathbf{l} = \mathbf{F}\mathbf{a}$. Обозначим \mathbf{W}_ν матрицу, диагональные элементы которой равны $[\mathbf{W}_\nu]_{ii} = w_{\nu,i}$, а остальные элементы равны нулю. Тогда минимизация суммы взвешенных квадратов приводит к* $\hat{\mathbf{a}}_\nu = (\mathbf{F}^\top \mathbf{W}_\nu \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^\top \mathbf{W}_\nu \mathbf{x}$ и $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{x} - \mathbf{F}\hat{\mathbf{a}}_\nu$.

1.2. Дисперсии остатков, ковариации остатков и разрешения детекторов. Вследствие вида уравнений (2)–(4) каждый остаток $r_{\nu,i}$ является линейной комбинацией компонент вектора \mathbf{x} :

$$r_{\nu,i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N u_{\nu,ij} x_j, \tag{6}$$

где $u_{\nu,ij}$ — это константы, которые зависят от \mathbf{w}_ν и \mathbf{z} , но не зависят от \mathbf{x} .

Остаток, рассчитанный с истинным \mathbf{x}_t , должен быть равен нулю. В противном случае наша модель трека была бы неверной. Следовательно,

$$r_{\nu,i}(\mathbf{x}_t) = x_{t,i} - l(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}_t, z_i) = \sum_{j=1}^N u_{\nu,ij} x_{t,j} = 0. \tag{7}$$

* Аналогичный результат с другим определением \mathbf{W} можно найти в работе [16], уравнение (7.63).

Подставив $x_i = x_{t,i} + \epsilon_i$ в $r_{\nu,i}(\mathbf{x})$, получаем

$$\begin{aligned} r_{\nu,i}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N u_{\nu,ij}(x_{t,j} + \epsilon_j) = \sum_{j=1}^N u_{\nu,ij}x_{t,j} + \sum_{j=1}^N u_{\nu,ij}\epsilon_j = \\ &= \sum_{j=1}^N u_{\nu,ij}\epsilon_j = \epsilon_i - l(\mathbf{w}_{\nu}, \boldsymbol{\epsilon}, z_i) = r_{\nu,i}(\boldsymbol{\epsilon}). \end{aligned} \quad (8)$$

Это означает, что если какой-либо остаток является линейной комбинацией компонент вектора \mathbf{x} , то \mathbf{x} можно заменить на $\boldsymbol{\epsilon}$.

Этот результат может быть записан также и в матричной форме:

$$\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{x} - \mathbf{F}\hat{\mathbf{a}}_{\nu} = (\mathbf{I} - \mathbf{F}(\mathbf{F}^T\mathbf{W}_{\nu}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W}_{\nu})\mathbf{x}. \quad (9)$$

Здесь \mathbf{I} — единичная матрица. Подставляя $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\epsilon}$ и $\mathbf{x}_t = \mathbf{l} = \mathbf{F}\mathbf{a}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\nu} &= \mathbf{F}\mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{F}(\mathbf{F}^T\mathbf{W}_{\nu}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W}_{\nu}\mathbf{F}\mathbf{a} - \mathbf{F}(\mathbf{F}^T\mathbf{W}_{\nu}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W}_{\nu}\boldsymbol{\epsilon} = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{F}(\mathbf{F}^T\mathbf{W}_{\nu}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W}_{\nu})\boldsymbol{\epsilon}. \end{aligned} \quad (10)$$

Как можно видеть, произведение матриц $\mathbf{F}^T\mathbf{W}_{\nu}\mathbf{F}$ сокращается с обратной матрицей от идентичного произведения, после чего неизвестная величина \mathbf{a} тоже сокращается, и окончательная формула (10)* идентична результату (9) с \mathbf{x} , замененным на $\boldsymbol{\epsilon}$.

Это позволяет избавиться от случайных и коррелированных величин \mathbf{x}_t в выражении для $r_{\nu,i}$ и записать его дисперсию как линейную комбинацию дисперсий разрешений:

$$V(r_{\nu,i}) = \sum_{j=1}^N u_{\nu,ij}^2 V(\epsilon_j). \quad (11)$$

Здесь мы учитываем, что $\text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$. Однако ковариации остатков не равны нулю, и их также можно записать:

$$\text{cov}(r_{\nu,i}, r_{\mu,j}) = \sum_{k=1}^N u_{\nu,ik}u_{\mu,jk}V(\epsilon_k).$$

Если i -я компонента вектора \mathbf{w}_{ν} равна нулю (т.е. измерение в i -м слое не используется для подгонки трека), то $u_{\nu,ii} = 1$.

Таким образом, имеется $N_w \times N$ уравнений для дисперсий остатков в N слоях, вычисленных с использованием N_w наборов весов, и $(N_w \times N)^2$ уравнений для ковариаций остатков, которые включают в себя и уравнения для дисперсий как частный случай. Выберем N уравнений для остатков в слоях i_n и j_n с весами ν_n и μ_n для

* Похожая формула без \mathbf{W} дана в книге [16], см. уравнения (9.5) и (9.6), и в книге [17], см. § 9.3.

$n \in [1, N]$. Введем обозначение \mathbf{y} для вектора соответствующих ковариаций $\text{cov}(r_{\nu_n, i_n}, r_{\mu_n, j_n})$ и обозначение $h_{i_n, j_n, k}^{(\nu_n, \mu_n)}$ для $u_{\nu_n, i_n, k} u_{\mu_n, j_n, k}$. Обозначим матрицу $N \times N$ символом \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{i_1, j_1, 1}^{(\nu_1, \mu_1)} & h_{i_1, j_1, 2}^{(\nu_1, \mu_1)} & \dots & h_{i_1, j_1, N}^{(\nu_1, \mu_1)} \\ h_{i_2, j_2, 1}^{(\nu_2, \mu_2)} & h_{i_2, j_2, 2}^{(\nu_2, \mu_2)} & \dots & h_{i_2, j_2, N}^{(\nu_2, \mu_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{i_M, j_N, 1}^{(\nu_N, \mu_N)} & h_{i_N, j_N, 2}^{(\nu_N, \mu_N)} & \dots & h_{i_N, j_N, N}^{(\nu_N, \mu_N)} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Если ν , μ , i и j ясны из контекста, будем использовать обычное обозначение для элементов матрицы \mathbf{H} в виде h_{ij} , где i — номер строки и j — номер столбца. Обозначим через $V(\epsilon)$ вектор дисперсий ошибок измерений, i -й компонентой которого является дисперсия разрешения $V(\epsilon_i)$. Общее уравнение для \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}V(\epsilon). \quad (13)$$

Если существует обратная матрица для матрицы \mathbf{H} , то существует единственное решение уравнения (13):

$$V(\epsilon) = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}. \quad (14)$$

К сожалению, все возможные матрицы \mathbf{H} для трех- и четырехслойных детекторов оказываются вырожденными, за исключением особых случаев, когда слои можно передвигать или менять местами, что будет рассмотрено отдельно. Если матрица \mathbf{H} вырождена, то обратной матрицы не существует*, а уравнение (13) имеет множество решений $V(\epsilon)$, т.е. найти истинные разрешения невозможно. Подробности будут обсуждаться в разд. 2.

1.3. Геометрические средние. Поскольку в нескольких работах указывалось на возможность вычисления разрешений без обращения каких-либо матриц, а при помощи так называемых «геометрических средних» дисперсий инклюзивного и эксклюзивного остатков [12, 13], рассмотрим два набора весов \mathbf{w}_ν и \mathbf{w}_μ для вычисления остатков в слое i : $(w_{\nu, i} > 0 \wedge w_{\mu, i} = 0 \wedge (\forall j \neq i \quad w_{\mu, j} = w_{\nu, j} \geq 0) \wedge (\exists j \neq i \wedge \exists k \neq i \quad (j \neq k \wedge w_{\mu, j} > 0 \wedge w_{\mu, k} > 0)))$. Остаток, вычисленный с \mathbf{w}_ν , называется «инклюзивным», поскольку при фитировании трека учитывается измерение в данном слое. Остаток, вычисленный с \mathbf{w}_μ , называется «эксклюзивным», поскольку данный слой не учитывается. Суммы весов связаны соотношением $s_\nu = s_\mu + w_{\nu, i}$. В дальнейшем индекс λ будет обозначать

* Если матрица \mathbf{H} вычисляется для дисперсий всех правильно упорядоченных остатков с использованием единичных весов для всех слоев, уравнение (14) аналогично полученному по-другому уравнению (12) из работы [9]. Там также отмечена возможная вырожденность.

либо ν , либо μ , когда формула применима к обоим случаям. Аналогично работе [12] выберем систему координат таким образом, чтобы $z_i = 0$. Последующие формулы значительно упрощаются, если обозначить ненормализованное средневзвешенное значение любого значения v_j (например, $x_j, z_j, x_j z_j$ и т. п.) двумя черточками сверху: $\overline{\overline{v}}_\lambda = \sum_{j=1}^N w_{\lambda,j} v_j$.

Таким образом, обычное нормализованное среднее равно $\overline{v}_\lambda = \overline{\overline{v}}_\lambda / s_\lambda$.

Так как $z_i = 0$, то $\overline{\overline{z}}_\nu = \overline{\overline{z}}_\mu$, $\overline{\overline{z^2}}_\nu = \overline{\overline{z^2}}_\mu$ и $\overline{\overline{xz}}_\nu = \overline{\overline{xz}}_\mu$, так что мы можем не указывать индексы ν и μ при этих средних. Величины D удовлетворяют соотношению $s_\lambda^2 D_\lambda(z) = s_\lambda \overline{\overline{z^2}} - \overline{\overline{z}}^2$. Вычитая это уравнение для $\lambda = \mu$ из того же уравнения для $\lambda = \nu$, получаем $s_\nu^2 D_\nu(z) = s_\mu^2 D_\mu(z) + w_{\nu,i} \overline{\overline{z^2}}$.

Параметр a_1 , заданный в уравнении (3), в новых обозначениях выглядит так:

$$\hat{a}_1(\mathbf{w}_\lambda, \mathbf{x}) = \frac{\overline{\overline{x}}_\lambda \overline{\overline{z^2}} - \overline{\overline{xz}} \overline{\overline{z}}}{D_\lambda(z)} = \frac{\overline{\overline{x}}_\lambda \overline{\overline{z^2}} - \overline{\overline{xz}} \overline{\overline{z}}}{s_\lambda \overline{\overline{z^2}} - \overline{\overline{z}}^2}.$$

Обозначим $C_j = \overline{\overline{z^2}} - z_j \overline{\overline{z}}$, поэтому $\overline{\overline{(Cx)}}_\mu = \sum_{j \neq i} w_{\mu,j} x_j (\overline{\overline{z^2}} - z_j \overline{\overline{z}})$.

Инклюзивный остаток равен

$$\begin{aligned} r_i(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}) &= x_i - \hat{a}_1(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x}) = \frac{x_i s_\nu \overline{\overline{z^2}} - x_i \overline{\overline{z}}^2 - \overline{\overline{x}}_\nu \overline{\overline{z^2}} + \overline{\overline{xz}} \overline{\overline{z}}}{s_\nu^2 D_\nu(z)} = \\ &= \frac{x_i (s_\mu + w_{\nu,i}) \overline{\overline{z^2}} - x_i \overline{\overline{z}}^2 - (\overline{\overline{x}}_\mu + w_{\nu,i} x_i) \overline{\overline{z^2}} + \overline{\overline{xz}} \overline{\overline{z}}}{s_\nu^2 D_\nu(z)} = \\ &= \frac{x_i s_\mu \overline{\overline{z^2}} - x_i \overline{\overline{z}}^2 - \overline{\overline{x}}_\mu \overline{\overline{z^2}} + \overline{\overline{xz}} \overline{\overline{z}}}{s_\nu^2 D_\nu(z)} = \frac{x_i s_\mu^2 D_\mu(z) - \overline{\overline{(Cx)}}_\mu}{s_\nu^2 D_\nu(z)}. \end{aligned}$$

Подобный вывод для эксклюзивного остатка приводит к результату

$$r_i(\mathbf{w}_\mu, \mathbf{x}) = \frac{x_i s_\mu \overline{\overline{z^2}} - x_i \overline{\overline{z}}^2 - \overline{\overline{x}}_\mu \overline{\overline{z^2}} + \overline{\overline{xz}} \overline{\overline{z}}}{s_\mu^2 D_\mu(z)} = \frac{x_i s_\mu^2 D_\mu(z) - \overline{\overline{(Cx)}}_\mu}{s_\mu^2 D_\mu(z)}.$$

Так как оба остатка представляют собой линейные комбинации измерений, в соответствии с результатами предыдущего пункта мы можем заменить измерения \mathbf{x} на ошибки измерений $\boldsymbol{\epsilon}$. После этого можно вычислить дисперсии. Поскольку числители обоих остатков одинаковы, числители обеих дисперсий тоже будут одинаковы. Оба числителя дисперсий остатков будут линейными комбинациями дисперсий разрешенных. Квадратный корень из их произведения сокращается, и результат просто равен одному числителю. Из этого можно сделать вывод, что геометрические средние не дают никакой дополнительной информации, поскольку они приводят к уравнениям, которые отличаются от уравнений

для дисперсий инклюзивного и эксклюзивного остатков только общими множителями.

Обозначим геометрическое среднее дисперсий символом V_i с верхним индексом (gm):

$$V_i^{(\text{gm})} = \sqrt{V(r_i(\mathbf{w}_\nu, \mathbf{x})V(r_i(\mathbf{w}_\mu, \mathbf{x}))} = \frac{s_\mu^4 D_\mu^2(z)V(\epsilon_i) + \sum_{j \neq i} w_{\mu,j}^2 C_j^2 V(\epsilon_j)}{s_\nu^2 D_\nu(z)s_\mu^2 D_\mu(z)}. \quad (15)$$

Согласно работам [12, 13], веса $w_{\nu,j}$ должны быть равны обратным дисперсиям $w_{\nu,j} = 1/V(\epsilon_j)$ для всех $j \in [1, N]$. Учитывая, что $w_{\nu,i}V(\epsilon_i) = 1$, можно упростить выражение (15):

$$\begin{aligned} V_i^{(\text{gm})} &= \frac{s_\mu^4 D_\mu^2(z)V(\epsilon_i) + \sum_{j \neq i} w_{\mu,j} C_j^2 w_{\nu,i} V(\epsilon_i)}{s_\nu^2 D_\nu(z)s_\mu^2 D_\mu(z)} = \\ &= \frac{s_\mu^2 D_\mu(z)V(\epsilon_i) + \overline{z^2} w_{\nu,i} V(\epsilon_i)}{s_\nu^2 D_\nu(z)} = \frac{s_\nu^2 D_\nu(z)V(\epsilon_i)}{s_\nu^2 D_\nu(z)} = V(\epsilon_i). \end{aligned}$$

Этот результат является точным для прямых треков*, но он бесполезен, поскольку для получения остатков с весами $w_{\nu,i} = 1/V(\epsilon_i)$ нам нужно знать те самые разрешения $\sqrt{V(\epsilon_i)}$, которые мы хотим получить. Численные тесты показывают, что итерационная процедура с пересчетом остатков с ранее полученными весами бесполезна.

Еще один частный случай уравнения (15) можно получить для $w_{\nu,j} = 1$ для всех $j \in [1, N]$:

$$V_i^{(\text{gm})} = \frac{\left((N-1)\overline{z^2} - \overline{z^2} \right)^2 V(\epsilon_i) + \sum_{j \neq i} (\overline{z^2} - z_j \overline{z})^2 V(\epsilon_j)}{(N\overline{z^2} - \overline{z^2})((N-1)\overline{z^2} - \overline{z^2})}.$$

Если дисперсии разрешений одинаковы: $V(\epsilon_i) = V(\epsilon_j) = V(\epsilon)$, то

$$V_i^{(\text{gm})} = \frac{\left((N-1)\overline{z^2} - \overline{z^2} \right)^2 V(\epsilon) + \left((N-1)\overline{z^2} - \overline{z^2} \right) \overline{z^2} V(\epsilon)}{(N\overline{z^2} - \overline{z^2})((N-1)\overline{z^2} - \overline{z^2})} = V(\epsilon).$$

Следовательно, если разрешения слоев равны и если остатки рассчитаны с единичными весами, то геометрическое среднее равно квадрату разрешения слоев. Расчеты по методу Монте-Карло, представленные в работе [14], подтверждают, что геометрическое среднее дает корректную оценку разрешения в случае равных разрешений и ошибочную в случае неравных. К сожалению, работа [14], как и многие другие,

* В другом выводе, представленном в работе [12], одно из промежуточных выражений было названо приближенным. Причина потери точности не указана.

не указывает, какие веса были использованы для расчета остатков. Важно понимать, что в случае равных разрешений тот же результат можно легко получить из любого отдельного остатка, используя уравнение (11). Таким образом, если необходим точный расчет разрешений, метод геометрических средних не дает никакой дополнительной информации.

2. РЕКОНСТРУКЦИЯ РАЗРЕШЕНИЯ

2.1. Три детектирующих слоя. 2.1.1. Фиксированное расположение слоев. Расчеты показывают, что матрица \mathbf{H} для трех слоев оказывается вырожденной для любой *данной* системы уравнений для дисперсий, ковариаций, весов и несовпадающих z -координат слоев. Однако доказать, что это верно для произвольного набора уравнений и параметров, непросто. Это можно сделать путем автоматического перебора и проверки всех матриц \mathbf{H} , соответствующих всем различным системам уравнений, с помощью систем компьютерной алгебры (СКА), таких как REDUCE [18]. При этом все параметры заданы как алгебраические переменные. Выбор неидентичных комбинаций уравнений поясняется в приложении. Согласно тестам с СКА REDUCE, все определители этих матриц равны нулю.

Более того, для всех уравнений справедливы следующие соотношения:

$$\frac{h_{i,j,2}^{(\nu,\mu)}}{h_{i,j,1}^{(\nu,\mu)}} = \frac{(z_3 - z_1)^2}{(z_3 - z_2)^2}, \quad \frac{h_{i,j,3}^{(\nu,\mu)}}{h_{i,j,1}^{(\nu,\mu)}} = \frac{(z_2 - z_1)^2}{(z_3 - z_2)^2}. \quad (16)$$

Заметим, что все веса взаимно сокращаются. Это означает, что все уравнения для дисперсий и ковариаций линейно зависимы. Следовательно, можно получить только одно значение. Например, если зазоры между слоями равны, можно получить только неточное среднее $(V(\epsilon_1) + 4V(\epsilon_2) + V(\epsilon_3))/6$, смещенное в сторону доминирования среднего слоя. Если все слои расположены очень близко друг к другу, так что $z_1 \approx z_2 \approx z_3$, то выражения значительно упрощаются, и все три разрешения можно легко найти. То же самое верно, если направления треков известны, т. е. измерены удаленным детектором.

2.1.2. Перестановка или перемещение слоев. Если можно перемещать или переставлять слои, все разрешения могут быть восстановлены*. Например, пусть трек фиксируется по всем трем слоям с единичными весами при равных зазорах между слоями. Пусть $V(r_1)$ получено после перестановки первого и второго слоев, $V(r_2)$ получено без перестановок и перемещения, а $V(r_3)$ получено после перестановки второго и третьего

* Идея проверки перестановок слоев была предложена Н.В.Грузинским в 2024 г.

слоев (что фактически означает, что всегда вычисляется остаток в исходном втором слое, но этот слой расположен в разных местах). Тогда

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -0,5 & -2 \\ -2 & 2,5 & -2 \\ -2 & -0,5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Вектор квадратов разрешений $V(\epsilon)$ можно восстановить с помощью уравнения (14).

2.2. Четыре детектирующих слоя. 2.2.1. Фиксированное расположение слоев. Как и в случае трех слоев, матрица \mathbf{H} для четырех фиксированных слоев оказывается вырожденной для любой *данной* системы уравнений для дисперсий или ковариаций и для любых весов и несовпадающих z -координат слоев. Доказать, что это верно для любой вообще системы уравнений и параметров, можно при помощи СКА. Расчеты с помощью СКА REDUCE [18] и GiNaC [19, 20] показывают, что все определители матриц \mathbf{H} , размером 4×4 , соответствующих неидентичным системам уравнений, равны нулю, что и доказывает вырожденность матриц.

Это означает, что любые 4 уравнения линейно зависимы. Все возможные матрицы \mathbf{H} имеют ранг не более трех. Невозможно восстановить индивидуальные разрешения 4 слоев* без использования их физической перестановки или сдвига.

Выберем любые три строки и три первых столбца в любой матрице \mathbf{H} размером 4×4 , которая соответствует неидентичным системам уравнений. Составим из соответствующих элементов новую матрицу размером 3×3 . Оказывается, что все определители таких матриц отличны от нуля. Если только это не связано с тем, что СКА REDUCE не может упростить эти очень сложные выражения, все эти частичные матрицы \mathbf{H} , размером 3×3 , как и соответствующие исходные матрицы 4×4 , имеют ранг 3. Тогда 3 компоненты вектора \mathbf{u} могут быть линейно независимы.

2.2.2. Среднее разрешение слоев с фиксированными положениями. Поскольку максимум 3 компоненты \mathbf{u} линейно независимы, предположим, что существует 3 параметра α_i , которые позволяют выразить среднюю дисперсию как линейную комбинацию измеренных \mathbf{u} :

$$\forall V(\epsilon) \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i y_i = \boldsymbol{\alpha}^{pT} \mathbf{y}^p = \boldsymbol{\alpha}^{pT} \mathbf{H}^p V(\epsilon) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 V(\epsilon_i) \Rightarrow \mathbf{H}^{pT} \boldsymbol{\alpha}^p = \frac{1}{4} \mathbf{1}. \quad (17)$$

* Этот вывод согласуется с уравнением (13) в работе [9], которое записано для дисперсий остатков, вычисленных относительно инклюзивных 4-слойных треков с единичными весами. Однако этот вывод противоречит утверждениям в работах [10, 11] для другого частного случая.

Здесь векторы α и y , состоящие из трех компонент вместо четырех, обозначены верхним индексом «р» («partial»): α^p и y^p . \mathbf{H}^p — это частичная матрица \mathbf{H} без одной из строк. Ее размер равен 3×4 . Мы имеем четыре уравнения относительно трех неизвестных. Общее решение существует, если решение первых трех уравнений удовлетворяет четвертому уравнению. Согласно СКА REDUCE ни одно из решений первых трех уравнений не удовлетворяет четвертому в общем случае. Это означает, что точное среднее разрешение не может быть найдено для произвольных положений слоев.

Пусть $z_2 - z_1 = z_4 - z_3$ или $z_1 - z_3 = z_2 - z_4$, что будем называть симметричным расположением слоев, поскольку при этом зазор между первым и вторым по порядку слоем равен зазору между третьим и четвертым. Тогда четвертое уравнение всегда удовлетворяется решениями трех первых уравнений. Поэтому среднее разрешение слоев для симметричного 4-слойного детектора всегда можно найти.

Другой тип симметрии — это матрица \mathbf{H} , которая симметрична относительно своего центра:

$$h_{ij} = h_{4-i+1,4-j+1}. \quad (18)$$

В этом случае:

$$\begin{pmatrix} (V(\epsilon_1) + V(\epsilon_4))/2 \\ (V(\epsilon_2) + V(\epsilon_3))/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_{11} + h_{14} & h_{12} + h_{13} \\ h_{21} + h_{24} & h_{22} + h_{23} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 + y_4 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Затем рассчитывается общее среднее $(1/4) \sum_{i=1}^4 V(\epsilon_i)$ как среднее этих двух средних.

Расчеты с помощью СКА REDUCE показывают, что обратная матрица, присутствующая в этом выражении, существует для некоторого общего набора симметричных матриц \mathbf{H} , записанных для симметричных детекторов (см. приложение). Например, матрица симметрична относительно своего центра и обратная матрица существует, если детектор симметричен, $y^T = (V(r_{1,1}), V(r_{2,2}), V(r_{3,3}), V(r_{4,4}))$ и $w_{\nu,i} = w_{4-\nu+1,4-i+1}$.

2.2.3. Упрощение матрицы \mathbf{H} методом сокращения строк. Любую матрицу \mathbf{H} для системы четырех неидентичных уравнений можно преобразовать в матрицу особого вида с важными свойствами, используя простой метод сокращения строк. Будем вычитать выбранную строку m из всех остальных строк n с коэффициентами h_{nm}/h_{mm} . Выполним эту процедуру для $m = 2$, $m = 3$ и $m = 1$. Кроме того, вычтем из третьей строки вторую строку с коэффициентом, равным отношению *новых значений* в последнем столбце: h_{34}/h_{24} . Полную процедуру можно представить как произведение некоторой матрицы \mathbf{G} размером 4×4

и матрицы \mathbf{H} . Предполагаются те же операции с \mathbf{y} . Уравнение (13) принимает вид

$$\mathbf{GHV}(\epsilon) = \mathbf{Gy}, \quad (19)$$

где матрица \mathbf{GH} :

$$\mathbf{GH} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{11}k_1 \\ 0 & c_{22} & 0 & c_{22}k_2 \\ 0 & c_{32} & c_{32}k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Здесь c_{11} , c_{22} , c_{32} — величины или алгебраические выражения, зависящие от выбранных уравнений, координат и весов слоев.

Все значения k оказались одинаковыми и независимыми от весов (сравните с уравнениями (16)):

$$k_1 = \frac{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}{(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)}, \quad k_2 = -\frac{(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_3)(z_4 - z_1)},$$

$$k_3 = \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_3)}.$$

Данные соотношения были получены при помощи СКА REDUCE для любых *данных* уравнений и весов. Однако можно алгебраически доказать, что они должны оставаться такими же для вообще любых неидентичных уравнений и весов. Если это было бы не так, то можно было бы вместо последней нулевой строки в представленной выше матрице \mathbf{GH} добавить строку с другим k_i и найти все четыре $V(\epsilon_i)$, а потом доказать, что должна существовать матрица \mathbf{H} ранга 4. Но уже доказано, что такой матрицы не существует.

Если значения z отсортированы по возрастанию: $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$, или по убыванию, то k_1 и k_3 положительны, а k_2 отрицательно. При дополнительном условии равных расстояний между слоями (зазорах):

$$k_1 = k_3 = 1, \quad k_2 = -1/3. \quad (21)$$

Если значения z так же отсортированы и $z_2 - z_1 = z_4 - z_3$, то

$$k_1 = k_3 = 1, \quad -1 < k_2 < 0. \quad (22)$$

2.2.4. Среднее разрешение слоев с симметричным расположением. Если детектор симметричен (но матрица \mathbf{H} не обязательно симметрична согласно (18)), то среднее разрешение можно рассчитать, используя уравнения (20) и (22):

$$\frac{V(\epsilon_1) + V(\epsilon_4)}{2} = \frac{[\mathbf{Gy}]_1}{2c_{11}}, \quad \frac{V(\epsilon_2) + V(\epsilon_3)}{2} = \frac{[\mathbf{Gy}]_3}{2c_{32}}. \quad (23)$$

Общее среднее значение получается как среднее этих средних значений. Здесь $[\mathbf{Gy}]_1$ и $[\mathbf{Gy}]_3$ — первая и третья компоненты вектора \mathbf{Gy} , заданного уравнением (19).

2.2.5. Разрешения слоев при условии, что разрешение двух слоев одинаково. Для того чтобы пояснить идею данного метода, рассмотрим сначала симметричные детекторы. Добавим первую строку матрицы \mathbf{GH} с множителем $-k_2c_{22}/(2c_{11})$ ко второй строке. Тогда вторая строка будет такой: $-k_2c_{22}/2, c_{22}, 0, c_{22}k_2/2$. Согласно уравнению (21) для упорядоченных z_i и равных зазоров $k_2/2 = -1/6$. Далее полезно различать в обозначениях истинные дисперсии и их реконструированные оценки, которые могут отличаться от истинных. Будем обозначать реконструированные оценки дисперсий и стандартных отклонений шляпками. Если $V(\epsilon_1) \approx V(\epsilon_4)$ (обозначим их оценку $\widehat{V}(\epsilon_{14})$), то векторное произведение второй строки и вектора дисперсий $(-k_2c_{22}/2, c_{22}, 0, c_{22}k_2/2)V(\epsilon) \approx c_{22}V(\epsilon_2)$. Отсюда можно найти оценки $\widehat{V}(\epsilon_2)$, а потом и $\widehat{V}(\epsilon_3)$, и $\widehat{V}(\epsilon_{14})$. Различие между $V(\epsilon_1)$ и $V(\epsilon_4)$ будет очень мало исказить эти результаты. Даже если разброс между $V(\epsilon_1)$ и $V(\epsilon_4)$ ожидается таким же, как и между $V(\epsilon_2)$ и $V(\epsilon_3)$, последние можно оценить много точнее, чем этот предполагаемый разброс. Например, если $\sigma(\epsilon_1) - \sigma(\epsilon_4) = 2\tau$, где τ — некоторая малая величина, то для равных зазоров $d\widehat{\sigma}(\epsilon_{14})/d\tau = 0$, $d\widehat{\sigma}(\epsilon_2)/d\tau = -\sigma(\epsilon_{14})/(3\widehat{\sigma}(\epsilon_2))$, $d\widehat{\sigma}(\epsilon_3)/d\tau = \sigma(\epsilon_{14})/(3\widehat{\sigma}(\epsilon_3))$.

Общее решение для произвольных зазоров и примерно равного разрешения слоев 1 и 4:

$$\widehat{V}(\epsilon_{14}) = \frac{[\mathbf{Gy}]_1}{c_{11}(1+k_1)}, \quad (24)$$

$$\widehat{V}(\epsilon_2) = -k_2 \frac{[\mathbf{Gy}]_1}{c_{11}(1+k_1)} + \frac{[\mathbf{Gy}]_2}{c_{22}}, \quad (25)$$

$$\widehat{V}(\epsilon_3) = \frac{1}{k_3} \left(k_2 \frac{[\mathbf{Gy}]_1}{c_{11}(1+k_1)} - \frac{[\mathbf{Gy}]_2}{c_{22}} + \frac{[\mathbf{Gy}]_3}{c_{32}} \right). \quad (26)$$

Аналогичные выражения можно получить для всех остальных комбинаций предположительно одинаковых слоев. Однако чувствительность других решений к разности разрешений слоев, которые предполагаются одинаковыми, гораздо выше.

Отметим, что если зазоры между слоями не равны, то уравнение (24) представляет взвешенное среднее $V(\epsilon_1)$ и $V(\epsilon_4)$ с весами, отличающимися от 1/2, см. следующий пункт.

2.2.6. Средние разрешения слоев с асимметричным расположением. Если детектор не идеально симметричен, но нарушение симметрии мало, то получить точные средние значения нельзя, как доказано в п.2.2.2. Но можно поднять вопрос о приближенных оценках,

в качестве которых разумно использовать взвешенные средние с весами, минимально отличающимися от «правильных» $1/4$ и $1/2$. Если уравнение $z_2 - z_1 = z_4 - z_3$ нарушено незначительно, т.е. $z_2 - z_1 \approx z_4 - z_3$, то k_1 и k_3 не должны сильно отличаться от единиц. Умножим первую и третью строки матрицы \mathbf{GH} в уравнении (20) на некоторые множители γ_1 и γ_3 и потребуем, чтобы сумма множителей перед соответствующими $V(\epsilon_i)$ была равна единице: $\gamma_1 c_{11}(1 + k_1) = 1 \Rightarrow \gamma_1 = 1/(c_{11}(1 + k_1))$, и $\gamma_3 c_{32}(1 + k_3) = 1 \Rightarrow \gamma_3 = 1/(c_{32}(1 + k_3))$. В результате мы получим средневзвешенные значения, которые должны быть близки к точным средним значениям для детекторов с небольшим нарушением симметрии:

$$\frac{\widehat{V(\epsilon_1) + V(\epsilon_4)}}{2} = \frac{[\mathbf{Gy}]_1}{c_{11}(1 + k_1)}, \quad (27)$$

$$\frac{\widehat{V(\epsilon_2) + V(\epsilon_3)}}{2} = \frac{[\mathbf{Gy}]_3}{c_{32}(1 + k_3)}, \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \widehat{V(\epsilon_i)} = \frac{[\mathbf{Gy}]_1}{2c_{11}(1 + k_1)} + \frac{[\mathbf{Gy}]_3}{2c_{32}(1 + k_3)}. \quad (29)$$

Уравнение (27) совпадает с уравнением (24). Среднее значение $\widehat{V}(\epsilon_2)$ и $\widehat{V}(\epsilon_3)$, полученных отдельно в уравнениях (25) и (26) при условии $V(\epsilon_1) = V(\epsilon_4)$, совпадает с уравнением (28) только в случае симметричных детекторов ($k_3 = 1$), для которых оба дают один и тот же точный результат. Для произвольных расстояний между слоями это среднее значение зависит от разности $V(\epsilon_1) - V(\epsilon_4)$. Если эта разность равна нулю, это среднее значение может быть даже точным для разных зазоров, поскольку вообще выражение имеет вид

$$\frac{\widehat{V}(\epsilon_2) + \widehat{V}(\epsilon_3)}{2} = \frac{1}{2} (V(\epsilon_2) + V(\epsilon_3)) + \frac{k_2(1 - k_3)}{2k_3(k_1 + 1)} (V(\epsilon_1) - V(\epsilon_4)).$$

Таким образом, точность этой оценки средней дисперсии тем лучше, чем меньше разница между $V(\epsilon_1)$ и $V(\epsilon_4)$.

Для асимметричных детекторов немного более точные оценки этих средних значений, чем те, что даны уравнениями (27)–(29), можно получить, подобрав вектор α в уравнении, подобном уравнению (17), так, чтобы элементы вектора $\mathbf{H}^T \alpha$ были как можно ближе к 0, $1/4$ или $1/2$, в зависимости от задачи. Однако численные тесты показывают, что точность таких оценок лишь немного лучше.

2.2.7. Перестановка или перемещение слоев. Перестановка двух слоев или сдвиг слоя позволяет найти невырожденную матрицу \mathbf{H} и восстановить все разрешения.

2.3. Пять и более детектирующих слоев. Для 5 и более детектирующих слоев существует множество комбинаций независимых уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан общий метод восстановления индивидуальных разрешений детектирующих слоев в многослойных детекторах. Индивидуальные разрешения слоев могут быть получены для трех- и четырехслойных детекторов только в случае, если возможно перемещение слоев относительно друг друга или их перестановка и повторение измерений. Если четырехслойный детектор симметричен (т. е. расстояние между первым и вторым слоями равно расстоянию между третьим и четвертым слоями), то может быть найдено среднеквадратичное разрешение четырех слоев и среднеквадратичное разрешение слоев 1 и 4, а также 2 и 3. Если симметрия в четырехслойном детекторе немного нарушена, можно получить приблизительные оценки этих значений. Если разрешения слоев 1 и 4 равны (или приблизительно равны), то можно получить точные (или, соответственно, приближенные, но с хорошей точностью) индивидуальные разрешения второго и третьего слоя, а также общее разрешение первого и четвертого слоев.

Индивидуальные разрешения могут быть получены для детекторов с пятью слоями и с большим количеством слоев.

Ковариации остатков не дают дополнительной информации, которую нельзя было бы получить при помощи дисперсий остатков. Если нужен точный расчет разрешений, то геометрические средние дисперсий инклюзивных и эксклюзивных остатков не дают никакой дополнительной информации, которую нельзя было бы получить при помощи самих дисперсий. Геометрические средние, полученные с единичными весами, равны разрешению слоя только в том случае, если слои детектора имеют одинаковое разрешение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

При выявлении вырожденности матриц при помощи СКА полезно иметь в виду следующее. Если утверждение $A(x_1, x_2)$ (например, уравнение) истинно для любых x_1 и x_2 из любого множества, например, из \mathbb{R} , то $A(x_2, x_1)$ также истинно. Если утверждение $A(x_1, x_1, x_2)$ истинно для любых x_1 и x_2 из любого множества, $A(x_2, x_2, x_1)$ также истинно, но $A(x_1, x_2, x_2)$ может быть ложным. Нет необходимости тестировать все идентичные комбинации. Назначим постоянный уникальный весовой индекс для каждого остатка. Например, для трехслойных детекторов:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} u_{1,i_1}u_{2,j_1} & u_{1,i_2}u_{2,j_2} & u_{1,i_3}u_{2,j_3} \\ u_{3,i_2}u_{4,j_2} & u_{3,i_2}u_{4,j_2} & u_{3,i_2}u_{4,j_2} \\ u_{5,i_3}u_{6,j_3} & u_{5,i_3}u_{6,j_3} & u_{5,i_3}u_{6,j_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{i_1,j_1,1}^{(1,2)} & h_{i_1,j_1,2}^{(1,2)} & h_{i_1,j_1,3}^{(1,2)} \\ h_{i_2,j_2,1}^{(3,4)} & h_{i_2,j_2,2}^{(3,4)} & h_{i_2,j_2,3}^{(3,4)} \\ h_{i_3,j_3,1}^{(5,6)} & h_{i_3,j_3,2}^{(5,6)} & h_{i_3,j_3,3}^{(5,6)} \end{pmatrix}.$$

В случаях, когда значения z не ограничены никакими условиями, например условием симметрии, их индексы могут увеличиваться без пропус-

ков. Критерии отбора (для целого числа $n \in \mathbb{Z}$): $i_1 = 1 \wedge (\forall n \in [1, N] (j_n = i_n \vee j_n = i_n + 1)) \wedge (\forall n \in [2, N] i_n \in [i_{n-1}, \max\{i_{n-1}, j_{n-1}\} + 1])$. Для четырехслойных детекторов из $16^4 = 65536$ систем уравнений остается всего 164 системы.

Для симметричных детекторов условие $(\forall n \in [1, N] i_n \leq j_n) \wedge (\forall n \in [2, N] (i_n > i_{n-1} \vee (i_n = i_{n-1} \wedge j_n \geq j_{n-1}))) \wedge 1 \leq i_1 \leq N - \max_{n \in [1, N]} \{j_n\} + 1$ оставляет 399 систем.

Для матриц \mathbf{H} размером 4×4 для симметричных детекторов, удовлетворяющих условию $z_2 - z_1 = z_4 - z_3$, с симметричными весами: $\forall \nu \in [5, 8] \wedge \forall i \in [1, 4] w_{\nu, i} = w_{9-\nu, 5-i}$, и симметричными индексами i_n и j_n : $(i_1 = 5 - j_4 \wedge j_1 = 5 - i_4) \wedge (i_2 = 5 - j_3 \wedge j_2 = 5 - i_3)$ (такие матрицы симметричны согласно уравнению (18)), имеется всего 18 систем уравнений, которые удовлетворяют этим условиям.

Благодарности. Автор благодарит за полезные обсуждения и дискуссии П. В. Кравченко, Н. В. Грузинского и А. А. Дзюбу.

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Петербургского института ядерной физики им. Б. П. Константинова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт». Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Charpak G., Melchart G., Petersen G., Sauli F.* High-Accuracy Localization of Minimum Ionizing Particles Using the Cathode-Induced Charge Centre-of-Gravity Readout // Nucl. Instr. Meth. 1979. V. 167, No. 3. P. 455–464.
2. *Piuz F., Roozen R., Timmermans J.* Evaluation of Systematic Errors in the Avalanche Localization along the Wire with Cathode Strips Read-Out MWPC // Nucl. Instr. Meth. 1982. V. 196, No. 2–3. P. 451–462.
3. *Korytov A., Nehrlich E., Osborne L. S. et al.* Performance of Limited Streamer Drift Tubes // Nucl. Instr. Meth. A. 1994. V. 338, No. 2–3. P. 375–388.
4. *Bencze G., Chikanian A., Della Negra M. et al.* Position and Timing Resolution of Interpolating Cathode Strip Chambers in a Test Beam // Nucl. Instr. Meth. A. 1995. V. 357, No. 1. P. 40–54.
5. *Lau K., Pyrlik J.* Optimization of Centroid-Finding Algorithms for Cathode Strip Chambers // Ibid. 1995. V. 366, No. 2–3. P. 298–309.
6. *Amos N., Cremaldi L., Finocchiaro G. et al.* Position Resolution of MSGCs with Cathode Readout // Nucl. Instr. Meth. A. 1997. V. 384, No. 2–3. P. 342–350.
7. *Baarmand M. M., Bonushkin Yu., Chrisman D. et al.* Tests of Cathode Strip Chamber Prototypes // Nucl. Instr. Meth. A. 1998. V. 402, No. 1. P. 3652.
8. *Vorobyev A. A.* Precision Measurement of the Proton Charge Radius in Electron-Proton Scattering // Phys. Part. Nucl. Lett. 2019. V. 16, No. 5. P. 524.

9. *Frühwirth R.* Estimation of Variances in a Linear Model Applied to Measurements of Trajectories // Nucl. Instr. Meth. A. 1986. V. 243. P. 173–180.
10. *Bortfeldt J., Biebel O., Heereman D., Hertenberge R.* Development of a High-Resolution Muon Tracking System Based on Micropattern Detectors // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2012. V. 59, No. 4. P. 1252–1258.
11. *Bortfeldt J.* The Floating Strip Micromegas Detector, Versatile Particle Detectors for High-Rate Applications. Springer Theses. Springer, 2015.
12. *Carnegie R. K., Dixit M. S., Dubeau J. et al.* Resolution Studies of Cosmic-Ray Tracks in a TPC with GEM Readout // Nucl. Instr. Meth. A. 2005. V. 538, No. 1–3. P. 372–383.
13. *Arogancia D. C., Bacala A. M., Boudjemline K. et al.* Study in a Beam Test of the Resolution of a Micromegas TPC with Standard Readout Pads // Nucl. Instr. Meth. A. 2009. V. 602, No. 2. P. 403–414.
14. *Alexopoulos T., Iakovidis G., Leontsinis S., Ntekas K., Polychronakos V.* Examining the Geometric Mean Method for the Extraction of Spatial Resolution // J. Instrum. 2014. V. 9, No. 1. P. P01003.
15. *Smirnov I. B.* Algebraic Methods for Reconstruction of Coordinates in Cathode Strip Chambers // Nucl. Instr. Meth. A. 2023. V. 1055. P. 168496.
16. *Rencher A. C., Schaalje G. B.* Linear Models in Statistics. Second ed. John Wiley & Sons, Inc., 2008.
17. *Weisberg S.* Applied Linear Regression. Third ed. Hoboken, N. J.: Wiley-Interscience, 2005.
18. *Hearn A. C., Schöpf R.* REDUCE User's Manual. Free Version. <https://reduce-algebra.sourceforge.io/>. 2024.
19. *Bauer C., Frink A., Kreckel R.* Introduction to the GiNaC Framework for Symbolic Computation within the C++ Programming Language // J. Symb. Comput. 2002. V. 33, No. 1. P. 1–12.
20. GiNaC 1.8.8. An Open Framework for Symbolic Computation within the C++ Programming Language. Johannes Gutenberg Univ. Mainz, 2025. <https://www.ginac.de>.